794. Eigenwertproblem ノ一証明(續)

中野　秀五郎

§6. Measure Operator ノ性質ヲ研究スル前ニ互ニcommutative ナ Projective Operator ノ計算ヲ擴張シテ置ク。

以下 Operator ハ總テ互ニ commutative ナ Projective Operator トス。

P_1, P_2 ニ對シ $P_1 \dotplus P_2$ トハ P_1, P_2 ノ表ハス closed linear mannifold ノ和カラ作ラレ closed linear manifold ノ Projective Operator ヲ表ハスモノトス。即チ P_1 ト P_2 ガ commutative ナルヲ以テ

$$P_1 \dotplus P_2 = P_1 + P_2 - P_1 P_2$$

又

$$P_1 \dotplus P_2 \dotplus \cdots\cdots = \lim_{n\to\infty} (P_1 \dotplus \cdots\cdots \dotplus P_n)$$

トス。

$P_1, P_2, \cdots\cdots$ ニ對シ

$$P_n' = P_n \dotplus P_{n+1} \dotplus \cdots\cdots$$

ト置ケバ

$$P_1' \geqq P_2' \geqq \cdots\cdots$$

ニテ

$$\lim_{n\to\infty} P_n'$$

ガ存在スル。此レヲ

$$\lim_{n\to\infty} P_n' = \overline{\lim_{n\to\infty}} P_n$$

ト定義スル時　同様ニ

$$\lim_{n\to\infty}(P_nP_{n+1}\cdots\cdots) = \underline{\lim}_{n\to\infty} P_n$$

ト定メル。然ル時ハ

定理. $\mathfrak{L}$ ノ任意ノ element f ニ對シ

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\|P_nf\| \leqq \|\overline{\lim_{n\to\infty}} P_n f\|$$

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\|P_nf\| \geqq \|\underline{\lim}_{n\to\infty} P_n f\|$$

從ッテ

トキハ

$$\lim_{n\to\infty}\|P_nf\| = \|\lim_{n\to\infty} P_n f\|$$

ナリ。從ッテ $\lim\limits_{n\to\infty}(P_nf) = (\lim\limits_{n\to\infty} P_n)f$ ナリ。

証明

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} P_n = \lim_{n\to\infty}(P_n \dotplus P_{n+1} \dotplus \cdots\cdots)$$

又

$$P_n \dotplus P_{n+1} \dotplus \cdots\cdots \geqq P_n$$

$$\therefore \quad \|(P_n \dotplus P_{n+1} \dotplus \cdots\cdots)f\| \geqq \|P_nf\|$$

$$\therefore \quad \|\overline{\lim_{n\to\infty}} P_n f\| \geqq \overline{\lim_{n\to\infty}}\|P_nf\|$$

同様ニシテ

$$\|\underline{\lim}_{n\to\infty} P_n f\| \leqq \underline{\lim}_{n\to\infty}\|P_nf\|$$

§2 ニ於テ hyper maximal normal Operator H ニ對シ measure Operator E(X) ガ定義デキ此E(X)

ニ對シ

$$(Hf, g) = \int z\, d(E(X)f, g)$$

ナルコトヲ §3 ニテ証明シタ。此ノ $E(X)$ ハ次ノ性質ヲ有ス。

1°. $E(X_1)E(X_2) = E(X_2)E(X_1)$ commutative

2°. X_1 ト X_2 ガ共有点ナケレバ

$$E(X_1)E(X_2) = 0$$

3°. $X_1, X_2, \cdots\cdots$ ノ何レノ二ツモ共有点ナケレバ

$$E(X_1 + X_2 + \cdots\cdots) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots\cdots$$

4° $E(X)$ ノ manifold ハ X ヲ含ム open set G ニ對スル $E(G)$ ノ manifold ノ Durchschnitt ナリ。

以上ノ X ハ総テ total additive + open set ヲ含ム set class $\{X\}$ ニ属スルトス。又、$E(X)$ ガ hyper maximal ナルヲ以テ X ガ Gaussian plane 全体ナ時ハ 1. 即チ $E = 1$ ナリ。

3° ヨリ $X_1 \subset X_2$ ナラバ $E(X_1) \leqq E(X_2)$

ナルコトガワカル。又 X_1 ト X_2 ガ共有点アレバ

$$E(X_1 \dotplus X_2) \geqq E(X_1), \quad E(X_1 \dotplus X_2) \geqq E(X_2)$$

$$\therefore \quad E(X_1 \dotplus X_2) \geqq E(X_1) \dotplus E(X_2)$$

一方 $$E(X_1 \dotplus X_2) = E(X_1) + E(X_2 - X_1X_2)$$

$$\leqq E(X_1) \dotplus E(X_2)$$

$$\therefore \quad E(X_1 \dotplus X_2) = E(X_1) \dotplus E(X_2)$$

一般ニ

$$E(X_1 \dot{+} X_2 \dot{+} \cdots\cdots) = E(X_1) \dot{+} E(X_2) \dot{+} \cdots\cdots$$

$$E(X_1 \dot{+} X_2) = E(X_1) + E(X_2) - E(X_1, X_2)$$

$$E(X_1) \dot{+} E(X_2) = E(X_1) + E(X_2) - E(X_1 X_2)$$

$$E(X_1 X_2) = E(X_1) + E(X_2) - (E(X_1) \dot{+} E(X_2))$$

$$= E(X_1) E(X_2)$$

即チ

$$E(X_1 X_2) = E(X_1) E(X_2)$$

一般ニ

$$E(X_1 X_2 \cdots\cdots) = E(X_1) E(X_2) \cdots\cdots$$

故ニ

$$E\left(\overline{\lim_{n\to\infty}} X_n\right) = \overline{\lim_{n\to\infty}} E(X_n)$$

$$E\left(\underline{\lim_{n\to\infty}} X_n\right) = \underline{\lim_{n\to\infty}} E(X_n)$$

本節及ビ次節ニテハ separable space 即チ Hilbert. 空間 $\mathfrak{H}$ ニテ考ヘル。

hyper maximal normal Operator H ノ measure Operator ハ從ツテ次ノ性質ヲ有ス。

1° $E(Z)$ ハ互ニ commutative

2° $E(Z_1)$, $E(Z_2)$ ニ對シ $E(Z_1) \dot{+} E(Z_2)$ ガ存在ス。

3° $E(Z_1)$ ニ對シ $1 - E(Z_1)$ ガ存在ス.

4° 從ツテ $E(Z_1)$, $E(Z_2)$ ニ對シ $E(Z_1) \cdot E(Z_2)$ ガ存在ス。

5° $\overline{\lim_{n\to\infty}} E(Z_n)$, $\underline{\lim_{n\to\infty}} E(Z_n)$ ガ存在ス。

此ノ如キ性質ヲ有スル Projective Operator ヲ Rink ト云フコトニスル。從ツテ measure Operator ハ Rink ヲナス。然カモ $\mathfrak{H}$ ノ場合ニハ尚次ノ性質ガアル。今任意ノ measurable set $\mathfrak{Z}$ ニ對シ、$\mathfrak{H}$ 内ノ überal dicht ノ Element ヲ $f_1, f_2, \cdots\cdots, f_n, \cdots\cdots$ トスレバ $\| E(\mathfrak{Z}) f_n \|$ ハ $\mathfrak{Z}$ ヲ含ム総テノ open set G ニ對スル $\| E(G) f_n \|$ ノ lower limit ニ等シイコトガ容易ニ証明サレル。從ツテ

$$\| E(G_{n,m}) f_n \| < \| E(\mathfrak{Z}) f_n \| + \frac{1}{m}$$

ナルガ如キ $\mathfrak{Z}$ ヲ含ム open set $G_{n,m}$ ガ存在スル。

今

$$G_n = G_{1,1} ; G_{2,1} \cdot G_{22}\, G_{31}\, G_{32} \cdots\cdots G_{nn}$$

トスレバ

$$G_1 \supset G_2 \supset \cdots\cdots \rightarrow G_\delta$$

ナルヲ以テ

$$\lim_{n\to\infty} E(G_n) = E(G_\delta)$$

トナル。然ルニ一方

$$\| E(G_n) f_i \| < \| E(\mathfrak{Z}) f_i \| + \frac{1}{n} \quad (i = 1, 2, \cdots\cdots, m)$$

ナルヲ以テ

$$\| E(G_\delta) f_i \| \leqq \| E(\mathfrak{Z}) f_i \| \quad (i = 1, 2, \cdots\cdots)$$

又，$G_\delta \supset \mathfrak{Z}$ ヨリ

$$E(G_\delta) \geqq E(\mathfrak{Z})$$

$f_1, f_2, \cdots\cdots$ ハ überal dicht ナルニヨリ

$$E(G_\delta) = E(\mathfrak{Z})$$

ナリ。今 Gaussian plane 上有理数座標ノ点ヲ中心トシ，有理数半径ノ円ヲ考フレバ此レハ可附番個ナリ。従ッテ此等ノ有限個ノ和ヨリナル点集合モ可附番個。其レヲ

$$C_1,\ C_2,\ \cdots\cdots$$

トス。然ルトキハ G_δ ハ常ニ

$$\overline{\lim_{i\to\infty}}\, C_{n_i} = G_\delta$$

ナル如クニ表シ得ルヲ以テ

$$E(\mathfrak{z}) = \overline{\lim_{i\to\infty}}\ E(C_{n_i})$$

ナリ。即チ measure operator

$$E(C_1),\ E(C_2),\ \cdots\cdots$$

ヲ可附番個適當ニ定ムレバ，他ノ任意ノ measure Operator $E(\mathfrak{z})$ ハ其ノ部分列ヲ適當ニトレバ

$$\overline{\lim_{i\to\infty}}\, E(C_{n_i}) = E(\mathfrak{z})$$

ナラシメ得ル。コノ如キ性質ヲ有スル Rink ヲ separable ト云フコトヽスル。然ル時ハ

6° measure operator ハ separable Rink ナリト云フコトヲ得ル。

逆ニ又如何ナル separable Rink モ或ルーツノ hyper maximal normal Operator ノ measure Operator ナルコトハ次ノ如クニシテ証明サル。

$\{P\}$ヲ Projective operator ノ separable Rink トシ

$$P_1,\ P_2,\ \text{-------}$$

ヲ überal dicht ノ可附番個ノ operator トスル。

今, P_1, ----, P_n ヨリ和, 積, 差, Complement ニヨリテ得ル最小 operator ヲ

$$P_{n1},\ P_{n2},\ \text{-----},\ P_{nm_n}$$

トスノ 即チ、此等ハ互ニ orthogonal ニシテ [illegible]

及ビ其ノ Complement ハ P_{n1}, -----, P_{nm_n} ノ幾ツカノ和トシテ表ハサル。故ニ當然

$$P_{n1}+P_{n2}+\cdots\cdots+P_{n,m_n}=1$$

ナリ。偖、先ヅ $P_{11}=P_1$ ニ対シ gaussian plane 上ノ半径 1 ナル円 C_1 ヲ對應セシムル。

$$P_{21},\ P_{22},\ \text{-----},\ P_{2m_2}\ =$$

對シテハ、夫々半径 $\frac{1}{2}$ ノ円ヲ若シ、P_{11} ニ含マレヽバ内部ニ含マレザレバ外部ニアル如クニシテ円ヲ對應セシムル。

以下同様ニシテ、円

$$C_{11},\ C_{2,1},\ C_{22},\ C_{23},\ \text{-----}$$

ヲ得ル。此等ハ何レモ交ハルコトナク、半径 $\frac{1}{2^n}$ ノ円ニ對シテハ常ニ

$$P(C_{n+1,1})+P(C_{n+2,2})+\cdots\cdots=1$$

ナリ。次ニ任意ノ open set G ニ對シテハ、G ニ含マレ

ル以上ノ円ニ對スルPノ和ヨリ作ラレ closed linear manifold ノ Projective operator $E(G)$ ヲ對應セシムル。然ルトキハ

$$1°\quad E(G_1)E(G_2)=E(G_2)E(G_1)=E(G_1\cdot G_2)$$

$$2°.\quad E(G_1\dotplus G_2\dotplus\cdots\cdots)=E(G_1)\dotplus E(G_2)\dotplus\cdots\cdots$$

$$3°.\quad E(C_{n,m})=P_{n,m}$$

ナルコトガ容易ニ証明サレル。又§1ト同様ニシテ一般 measuruble set $\mathfrak{Z}$ ニ拡張スルコトニヨリ measure operator ヲ得ル。コノ measure operator ガ與ヘラレタ Rink ヲ含ムコトハ $P_{n,m}$ ヲ含ムコトヨリ明カナリ。又 measure operator $E(\mathfrak{Z})$ ハ

$$E(\mathfrak{Z})=E(G_\delta)$$

ナル G_δ ガ存在シ、open set ノ measure operator ハ Rink ニ含マレルヲ以テ其ノ極限 operator タル $E(G_\delta)$ モ亦 Rink ニ含マル。

故ニ與ヘラレタル Rink ハ

$$(Hf,g)=\int z\,d(E(\mathfrak{Z})f,g)$$

ナル normal operator ノ measure operator ト一致スル。

然カモ円ヲ有界ノ所ニ作レバ，H ハ bounded ナリ。

故ニ

定理. Projective Operator ノ separable Rink ニ對シテハ其レヲ measure operator ニスル

hyper maximal normal operator ガ無限ニ多ク存在ス。

次ノ定理ハ重要ナリ。

定理. Rink $\{P\}$ ノ各々ト commutative ニシテ $\{P\}$ ニ含マレザル Projective Operator F ニ對シテハ、常ニ $\{P\}$ ノ各々ト commutative ニシテ F ト commutative ナラザル Projective Operator ガ存在ス。從ッテ $\{P\}$ 各々ト Commutative ナ總ベテノ Projective operator ニ commutative ナ Projective Operator ハ $\{P\}$ ニ含マレル。

證明. F ノ Manifold 内ノ überal dicht ナ element ヲ $f_1, f_2, \ldots\ldots$ $1-F$ ノ Manifold 内ノ überal dicht ナ element ヲ $g_1, g_2, \ldots\ldots$ トスル。

然ルトキ、一定ノ f_i, g_j ニ對シ、P ヲ $\{P\}$ ノ總テニ動カシテ得ル element

$$P(f_i+g_j)$$

ノ總ベテヨリ作ラレル closed linear Manifold ヲ $\mathfrak{M}_{i,j}$ トシ、其ノ Projective Operator ヲ E_{ij} トスレバ E_{ij} ハ P ト Commutative デアル。如何トナレバ $P_1, P_2 \in \{P\}$ ナレバ又 $P_1 \cdot P_2 \in \{P\}$ トナルヲ以テナリ。F ガ若シ E_{ij} ノ總テ $\left(\begin{smallmatrix} i=1,2,\ldots\ldots \\ j=1,2,\ldots\ldots \end{smallmatrix}\right)$ ト Commutative ナリトスレバ

$$F(f_i+g_j)=P_{i,j}(f_i+g_j) \qquad P_{i,j}\in\{P\}$$

ナル $P_{i,j}$ ガ存在ス、故ニ $Fg_j=0$ ヨリ

$$Ff_i=P_{i,j}(f_i+g_j)$$

$$\therefore\ Ff_i=FP_{i,j}(f_i+g_j)=FP_{ij}f_i=P_{ij}Ff_i$$

$Ff_i=f_i$ ナルニヨリ

$$f_i=P_{ij}f_i$$

$$\therefore\ Ff_i=f_i+P_{ij}g_i \qquad \therefore\ P_{ij}g_j=0$$

今

$$P_j=P_{1j}\dotplus P_{2j}\dotplus\cdots\cdots$$

トスレバ $P_j\in\{P\}$ ニシテ

$$P_jg_j=0$$

$$P_jf_i=f_i \qquad (i=1,2,\cdots\cdots)$$

$f_1, f_2, \cdots\cdots$ ハ F ノ manifold 内ニテ überal dicht ナルヲ以テ

$$P_jF=F$$

ナリ。

又 $\quad P_0=P_1P_2\cdots\cdots$ トスレバ $P_0\in\{P\}$ ニシテ

$$P_0F=F$$

$$P_0g_j=0 \qquad (j=1,2,\cdots\cdots)$$

g_j ハ $1-F$ ノ manifold 内ニテ überal dicht ナルニヨリ

$$P_0(1-F)=0$$

$$\therefore\ P_0=P_0F=F$$

従ッテ F ガ $\{P\}$ ニ含マレルコトトナル。

§7. §5ニ於テハ一ツノ hyper maximal ナ measure Operator $E(\zeta)$ ニ對シ、$f(z)$ ヲ殆連續函數トスルトキハ

$$(Hf, g) = \int f(z)\, d(E(\zeta)f, g)$$

ニヨリ一ツノ hyper maximal normal operator ガ與ヘラレルコトヲ述ベタ。此処デハ如何ナル場合ニ hyper-maximal normal Operator H ガ上ノ如キ積分ニテ表ハサレルカヲ考ヘル。

定理. hyper maximal normal operator H ガ measure operator $E(\zeta)$ ニ關シ, 以上ノ如キ積ノ形ニテ表ハサレルタメノ必要且ツ充分ナ條件ハ H ノ measure Operator $F(\zeta)$ ノ Rink ガ $E(\zeta)$ ノ Rink ニ含マレルコトトデアル。

証明. 今

$$(Hf, g) = \int f(z)\, d(E(\zeta)f, g)$$

ナル形ニ表ハサレタリトスル。然ルトキハ $H^k f$ ガ sinnvoll ナル f ニ對シテハ

$$\left\| \left(\frac{H-z_0}{r_0}\right)^k f \right\|^2 \quad \int \left| \frac{f(z)-z_0}{r_0} \right|^{2k} d\| E(\zeta) f \|^2$$

故ニ

$$\left\| \left(\frac{H-z_0}{r_0}\right)^k f \right\| \leqq \| f \| \qquad (k=1, 2, \text{-----})$$

ナル f ハ

$$\left|\frac{f(z)-z_0}{r_0}\right| \leqq 1$$

ナル点 z ノ集合 z_0（此レハ $f(z)$ ガ殆連続ナルヲ以テ Loussin ノ定理ヨリ $\|E(z)f\|^2$ ニ関シ measurable）

従ッテ z_0 ヲ中心，半径 r_0 ノ円 $\overline{C_0}$ ニ對シテハ

$$F(\overline{C_0}) \leqq E(z_0)$$

又，$E(z_0)f = f$ ナル element ハ明カニ條件ニ適スルヲ以テ

$$F(\overline{C_0}) = E(z_0)$$

然ルニ $F(z)$ ハ $F(\overline{C_0})$ ノ部分列ノ極限ナルヲ以テ Rink $\{F(z)\}$ ハ $\{E(z)\}$ ニ含マレル。

逆ニ $\{F(z)\}$ ガ $\{E(z)\}$ ニ含マレタトス。

$$(Hf, g) = \int z\,d(F(z)f, g)$$

充分大ナル円ヲ C トスレバ

$$(HF(C)f, g) = \int_C z\,d(F(z)f, g)$$

$$= \lim \sum_{i=1}^{n} z_i (F(z_i)f, g)$$

$\{F(z)\} \subset \{E(z)\}$ ヨリ

$$F(z_i) = E(w_i)$$

ナル $E(w_i)$ ガ存在スル。

$$f_n(z) = z_i \qquad \text{in } \mathbb{W}_i$$
$$\qquad = 0 \qquad \text{他ノ点ニテハ}$$

ナル函数ニ對シテ、$f_n(z)$ ハ明カニ measurable 有界、
從ッテ殆連續ニシテ

$$\sum_{i=1}^{n} z_i(F(z_i)f, g) = \int f_n(z)\, d(E(\mathbb{W})f, g)$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f_c(z)$$

トスレバ

$$(HF(c)f, g) = \int f_c(z)\, d(E(\mathbb{W})f, g)$$

$c \to \infty$ ナラシムレバ $f_c(z) \to f(z)$ ナル $f(z)$ 存在スルヲ以テ

$$(Hf, g) = \int f(z)\, d(E(\mathbb{W})f, g)$$

又 Definitionsbereich ガ

$$\|Hf\|^2 = \int |f(z)|^2\, d\|E(\mathbb{W})f\|$$

ヨリ定マル。

此ノ定理ヨリ次ノ Neumann ノ定理ガ直チニ得ラレル。

定理. hyper maximal Operator $H_1, H_2,$ ------ ガ互ニ commutative (commutative ノ定義ハ如何ナル方法ニヨルモ結局ハ其ノ measure

Operator 同志ガ commutative ナルコトニ帰着スル）ナルトキハ一ツノ measure Operator $E(z)$ ガ存在シテ

$$(H_i f, g) = \int f_i(z)\, d(E(z) f, g)$$

ナル形ニ表ハサレル。

証明. $H_1, H_2, \cdots\cdots$ ノ measure Operator ナルヲ以テ結合其レ等ノ全体ニテ作ル Rink モ separable ナリ。其ノ Rink ヲ

定理. hyper maximal Operator H ガ N ノ函数トシテ表ハサレルタメノ必要且ツ充分ナ條件ハ H ガ N ト commutative ナ総ベテノ Projective Operator ト commutative ナルコトナリ。

証明. 前節ノ定理ニヨリ H ノ measure operator ノ Rink ガ N ノ其レニ含マレルコトヽナルカラデアル。

此ノ定理 Neumann, Riess, 三村氏等ニヨリテ証明サレテキル。

§6, §7 ニ於テハ §7 ノ最初ノ定理以外ハ separable ナシデハ今ノ所未ダ出来マセン。之レハ Rink ノ separable ヲ用ヒテ居リマスノデ、若シ之レニ換レモノガ考ヘラレヽバ一般ノ場合ニモ出来マス。目下研究中。